Teoria dos Grafos

Motivação e Introdução

por Mauro Silva

Agenda

- Motivação
- Marco Inicial
- Evolução
- Exemplos
- Definições
  - Gráfica
  - Formal
- Grafo Direcionado
  - Dígrafo
  - Exemplo
- Terminologias
- Grafo Simples Completo
- Grafo Bipartido Completo
- Grafos Isomorfos

© Mauro Silva

Motivação

- Grafos podem representar um número surpreendente de situações reais – organogramas, mapas rodoviários, rede de transporte e comunicação, etc.
- Em Ciência da Computação, Grafos podem representar redes lógicas, máquinas de estado finito e derivação de linguagens formais.

© Mauro Silva

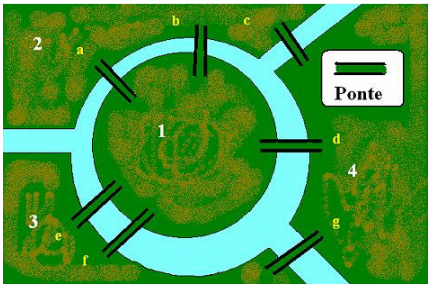
Motivação

- Podem ser usados como...
  - ...Ferramenta para modelagem.
  - ...Estrutura de dados.
  - ...Ferramenta para resolver problemas.
  - ...Ferramenta utilizada na abstração de problemas computacionais.

© Mauro Silva

Marco Inicial (*Königsberg*)

"Na cidade de **Königsberg** (Prússia no século XVIII, atual Kaliningrado, Rússia) havia duas grandes ilhas que, juntas, formavam um complexo que continha sete (7) pontes conforme mostra a figura ao lado.



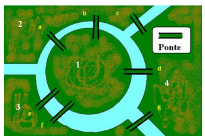
Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Sete_Pontes_de_K%C3%B6nigsberg

© Mauro Silva

Marco Inicial (*Königsberg*)

Discutia-se nas ruas da cidade a possibilidade de atravessar todas as pontes, sem repetir nenhuma. Havia-se tornado uma lenda popular a possibilidade da façanha quando Leonhard Euler, em 1736, provou que não existia caminho que possibilitasse tais restrições.

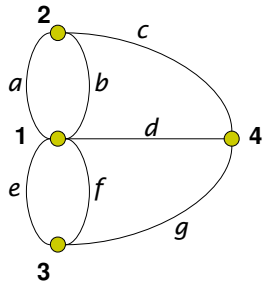
O genial Euler usou um raciocínio muito simples. Transformou os caminhos em retas e suas intersecções em pontos criando possivelmente o primeiro grafo da história. Então percebeu que só seria possível atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponte se **houvessem no máximo dois pontos de onde saia um número ímpar de caminhos**. A razão de tal coisa é: de cada ponto deve haver um número par de caminhos, pois será preciso um caminho para "entrar" e outro para "sair". Os dois pontos com caminhos ímpares referem-se ao início e ao final do percurso, pois estes não precisam de um para entrar e um para sair, respectivamente."

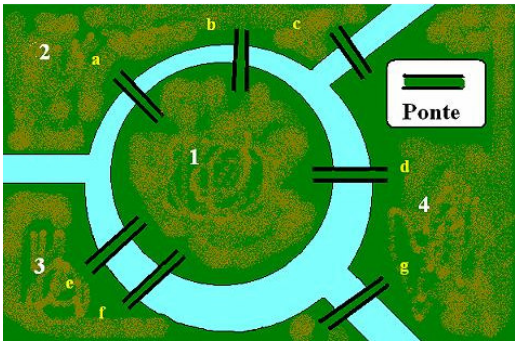


Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Sete_Pontes_de_K%C3%B6nigsberg

© Mauro Silva

Marco Inicial (*Königsberg*)

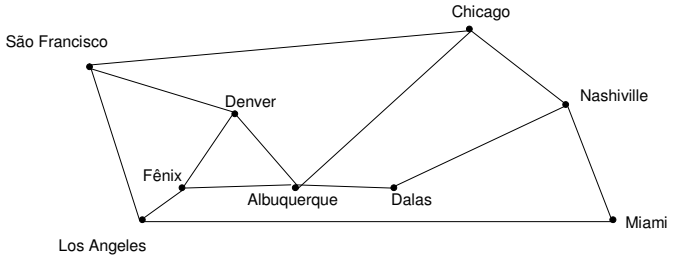




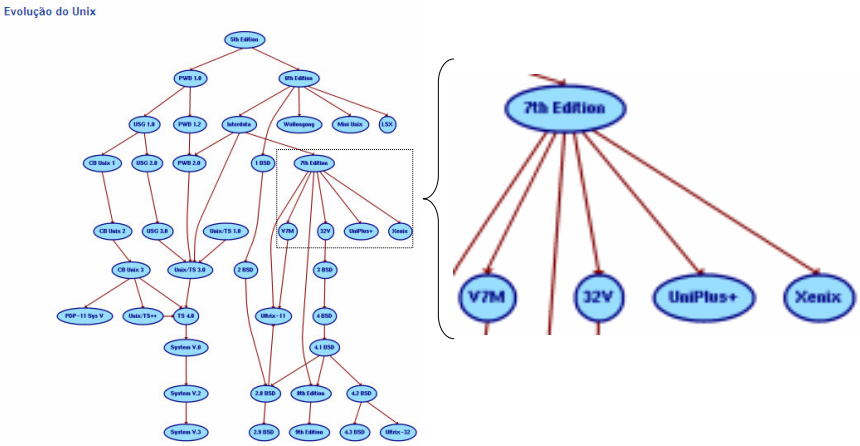
Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Sete_Pontes_de_K%C3%B6nigsberg

Exemplo - Rotas

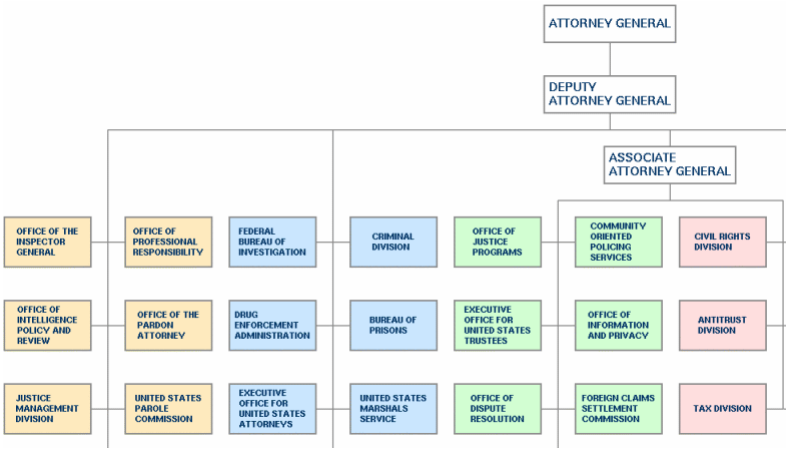
"Uma maneira de passar o tempo em uma viagem de avião é olhar os panfletos nos bolsos de assento. Este material quase sempre inclui um mapa das rotas da companhia proprietária do avião. Toda essa informação sobre rotas poderia ser expressa em um parágrafo; por exemplo, *existe uma rota direta entre Chicago e Nashville, mas não existe uma rota direta entre Nashville e São Francisco.* No entanto este parágrafo seria bastante longo e complicado, e não seríamos capazes de assimilar a informação tão rápida e claramente quanto a partir do mapa."



Exemplo – Evolução do UNIX

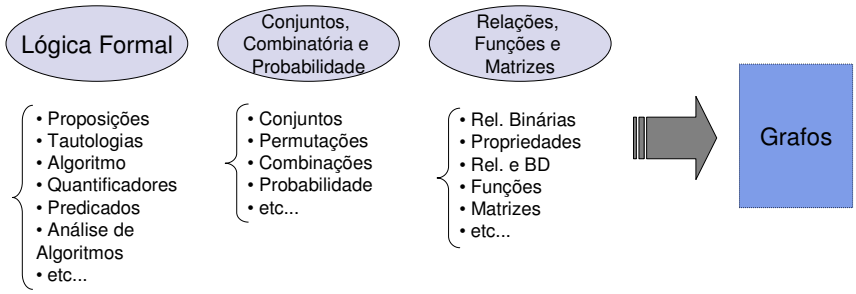


Exemplo – Departamento de Justiça dos EUA



Evolução

- Onde está Teoria dos Grafos????



© Mauro Silva

Definições

- Baseada na representação visual:

Um **grafo** é um conjunto não-vazio de **nós** (**vértices**) e um conjunto de **arcos** (**arestas**) tais que cada arco conecta dois nós.

- Formal:

Um **grafo** é uma tripla ordenada **(N, A, g)**, onde

N = um conjunto não-vazio de nós (vértices)

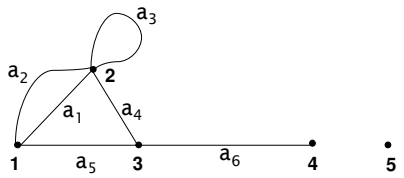
A = um conjunto de arcos (arestas)

g = uma função que associa a cada arco *a* um par *não-ordenado x-y* de nós, chamamos de **extremidades** de *a*.

© Mauro Silva

Definições

...segundo a definição.



Grafo *g*

$g(a_1) = 1\text{-}2$, $g(a_2) = 1\text{-}2$,

$g(a_3) = 2\text{-}2$, $g(a_4) = 2\text{-}3$,

$g(a_5) = 1\text{-}3$, $g(a_6) = 3\text{-}4$

© Mauro Silva

Grafo Direcionado (Dígrafo)

- Definição

Um **grafo direcionado** é uma tripla ordenada **(N, A, g)**, onde

N = um conjunto não-vazio de nós (vértices)

A = um conjunto de arcos (arestas)

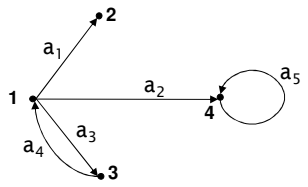
g = uma função que associa a cada arco *a* um par *ordenado* *(x,y)* de nós, onde *x* é o **ponto inicial** (**extremidade inicial**) e *y* é o **ponto final** (**extremidade final**) de *a*.

*"Em um **grafo direcionado**, cada arco tem um **sentido** ou **orientação**"*

© Mauro Silva

Exemplo de Grafo Direcionado

...segundo a definição.



Grafo *g*

$g(a_1) = (1,2)$, $g(a_2) = (1,4)$,
$g(a_3) = (1,3)$, $g(a_4) = (3,1)$,
$g(a_5) = (4,4)$

© Mauro Silva

Terminologias

- Alguns termos:
  - **Adjacentes:** dois nós em um grafo que são a extremidade de algum arco.
  - **Laço:** é um arco com extremidade *n*-*n* para algum nó *n*.
  - **Grafo sem arcos (nulo):** grafo que não tenha arco.
  - **Arcos paralelos:** dois arcos com as mesmas extremidades.
  - **Multigrafo:** permite o aparecimento de arcos paralelos.
  - **Grafo simples:** um grado sem laços nem arcos paralelos.
  - **Grafo Completo:** quando todo nó é adjacente a todos os outros nós (qualquer par de vértices distintos é adjacente).

© Mauro Silva

Terminologias

- Alguns termos:
  - **Nó isolado:** é um nó que não é adjacente a nenhum outro nó.
  - **Grau:** grau de um nó é o número de extremidades de arcos naquele nó.
  - **Grafo Regular:** quando todos os vértices tem o mesmo grau.
  - **Subgrafo:** subgrafo de um grafo é um conjunto de nós e um conjunto de arcos que são subconjuntos do conjunto original de nós e arcos, respectivamente.
  - **Caminho:** um caminho do nó n_0 para o nó n_k é uma seqüência

$$n_0, a_0, n_1, a_1, \ldots, n_{k-1}, a_{k-1}, n_k$$

© Mauro Silva

Terminologias

- Alguns termos:
  - **Comprimento:** o comprimento de um caminho é o número de arcos que ele contém (se um arco for usado mais de uma vez, ele é contado cada vez que é usado).
  - **Conexo:** quando um grafo possui um caminho de qualquer nó para qualquer outro.
  - **Ciclo:** é o caminho de algum nó n_0 para ele mesmo tal que nenhum arco apareça mais de uma vez.
  - **Acíclico:** grafo sem ciclos.

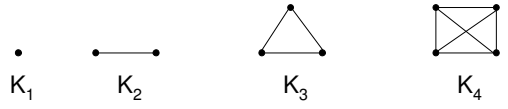
© Mauro Silva

Terminologias

- Alguns termos:
  - **Grafos Rotulados:** quando for feita a identificação dos vértices e/ou arestas.
  - **Grafos Valorados:** se existem uma ou mais funções relacionando *N* e/ou *A* com conjuntos de valores definidos especialmente.
    - Exemplo: $N=\{n_1,\ldots,n_m\}$, $A=\{a_1,\ldots,a_k\}$, $P=\{p_1,\ldots,p_m\}$ e $Q=\{q_1,\ldots,q_k\}$.
      $f:V\rightarrow P$, *ou seja*, $p_i=f(v_i)$
      $g:A\rightarrow Q$, *ou seja*, $q_j=g(a_j)$
      O significado de *f* e *g* depende da aplicação.

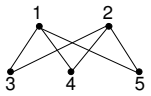
Grafo Simples Completo

- Um grafo simples completo com *n* vértices é denotado por K_n.



Grafo Bipartido Completo

- Considere o grafo K_5 abaixo.
  - Este grafo não é completo, já que nem todo nó é adjacente a todos os outros nós.
  - No entanto, os nós podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos, *{1,2}* e *{3,4,5}*, tais que **dois nós** quaisquer escolhidos **no mesmo conjunto** **não são adjacentes**, mas **dois nós** quaisquer escolhidos **um em cada conjunto** **são adjacentes**.



K_5

© Mauro Silva

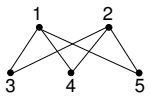
Grafo Bipartido Completo

- Definição

Um grafo é um **grafo bipartido completo** se seus nós podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos não-vazios N_1 e N_2,

tais que dois nós são adjacentes *sse* um deles pertence a N_1 e o outro pertence a N_2.

Se $|N_1|=m$ e $|N_2|=n$, um tal grafo é denominado por $K_{m,n}$.



$K_{2,3}$

© Mauro Silva

Grafos Isomorfos

- Informalmente temos...
  - Dois grafos podem parecer muito diferentes em sua representação visual mas ainda assim serem o mesmo grafo de acordo com a definição formal.

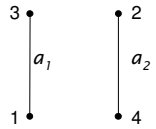


Fig.1

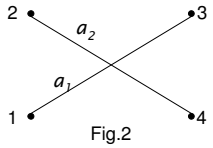


Fig.2

Estruturas que são iguais, exceto por uma mudança de nomes, são ditas ***isomorfas***.

Grafos Isomorfos

- Informalmente temos...
  - Se trocamos os nomes dos nós e dos arcos da Fig.1 através das funções a seguir, os grafos seriam iguais.

f_1 : $1 \rightarrow a$
$2 \rightarrow c$
$3 \rightarrow c$
$4 \rightarrow d$

f_2 : $a_1 \rightarrow e_2$
$a_2 \rightarrow e_1$

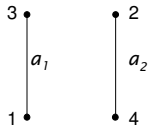


Fig.1

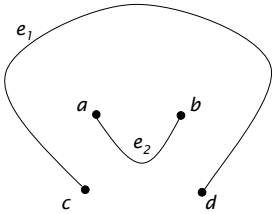
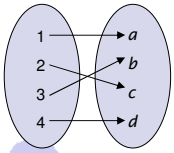


Fig.3

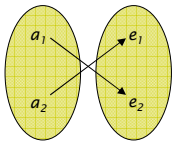
Grafos Isomorfos

- Informalmente temos...
  - Se trocamos os nomes dos nós e dos arcos da Fig.1 através das funções a seguir, os grafos seriam iguais.

f_1 : $1 \rightarrow a$
$2 \rightarrow c$
$3 \rightarrow b$
$4 \rightarrow d$



f_2 : $a_1 \rightarrow e_2$
$a_2 \rightarrow e_1$



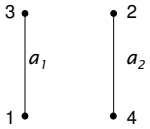


Fig.1

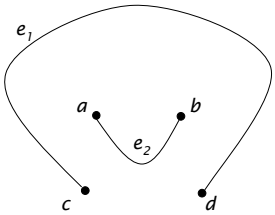


Fig.3

© Mauro Silva

Grafos Isomorfos

- Definição

Dois grafos (N_1,A_1,g_1) em (N_2,A_2,g_2) são **isomorfos** se existem bijeções

$f_1:N_1 \rightarrow N_2$ e $f_2:A_1 \rightarrow A_2$

tais que, para cada arco $a \in A_1$,

$g_1(a)=x\text{-}y$

sse $g_2[f_2(a)] = f_1(x)\text{-}f_1(y)$.

© Mauro Silva

Teoria dos Grafos

Motivação e Introdução

por Mauro Silva